Mathematatik

Wintersemester 2024/25

Einführung / Wiederholung

Achim Görres, M.A.
Email: a.goerres@hochschule-trier.de

BWL

6	Praktische Studienphase			Abschlussarbeit		
5	Seminar		WPF	WPF	Strategisches Management	Logistik und Produktion
4	Seminar		WPF	WPF	Marktforschung	Personal
3	Operations Research	Data Mining	Makroökonomie und Wirtschaftspolitik	Steuern	Entscheidung und operatives Management	Organisation
2	Sprache	Statistik	Mikroökonomie	Jahresabschluss	Kalkulation und Kontrolle	Finanzierung
1	Sprache	Mathematik	Wirtschaftsprivatrecht	Grundlagen der BWL und Buchführung	Interne Unternehmens- und Investitionsrechnung	Marketing und Vertrieb

WI

6	Praktische Studienphase			Abschlussarbeit		
5	WI-Seminar		WI-WPF	Logistik und Produktion	Entscheidung und operatives Management	Organisation
4	WI-Seminar		WI-WPF	Betriebliche Kernsysteme	Geschäftsprozess-management	Finanzierung
3	Software Engineering	Datenbanken	Business Intelligence und Analytics	Informationssysteme	Informationsmanagement	Operations Research
2	Programmierung 2	Einführung in IT 2: Software	Einführung in IT 1: Hardware	Jahresabschluss	Kalkulation und Kontrolle	Statistik
1	Programmierung 1	Formale Grundlagen der Informatik	Grundlagen der BWL und Buchführung	Marketing und Vertrieb	Interne Unternehmens- und Investitionsrechnung	Mathematik

WP

6	Praxisprojekt (im wirtschaftspsychologischen Bereich)			Abschlussarbeit (im wirtschaftspsychologischen Bereich)		
5	Sprache	Psychologische Marktforschung	Seminar II		Logistik und Produktion	Wirtschaftsprivatrecht
4	Sprache	Führungspsychologie	Seminar I		Finanzierung	Kalkulation und Kontrolle
3	Werbe- und Konsumpsychologie	Arbeits- und Organisationspsychologie	Multivariate Verfahren der Psychologie	Data Mining	Makroökonomie und Wirtschaftspolitik	Interne Unternehmens- und Investitionsrechnung
2	Sozialpsychologie	Differentielle- und Persönlichkeitspsychologie	Statistik	Mikroökonomie	Unternehmensführung	Jahresabschluss
1	Allgemeine Psychologie	Entwicklungs- und Biopsychologie	Einführung in die psychologische Methodik	Mathematik	Marketing und Vertrieb	Grundlagen der BWL und Buchführung

Mathematik ist eine *begleitende Methodenlehre* in allen Bachelor-Studiengängen

Programmübersicht der Veranstaltung Mathematik

I. Differentialrechnung

II. Univariate und multivariate Optimierung

III. Integralrechnung

IV. Lineare Algebra: Matrizenrechnung

V. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung / Kombinatorik

VI. Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Literatur zur Veranstaltung

Literatur:

I. **K. Sydsaeter/P. Hammond: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 5. Auflage, München 2018.**

II. F. Böker: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Das Übungsbuch, 3. Auflage, München 2018.

III. M. C. Wewel/A. Blatter: Statistik im Bachelor-Studium der BWL und VWL, 4. Auflage, München 2019.

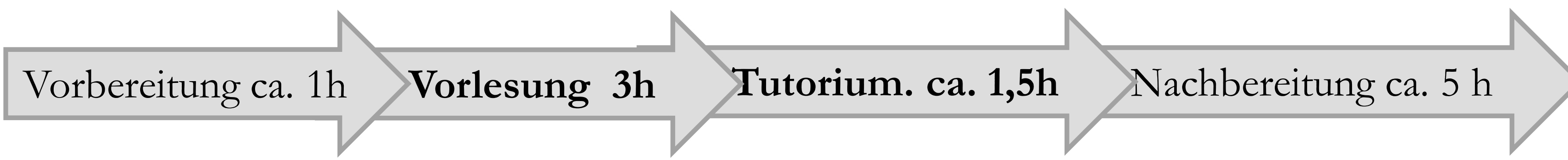
Organisation der Veranstaltung

I. Die in der Veranstaltung verwendeten Folien werden in STUD.IP online gestellt und können von dort heruntergeladen werden.

II. Empfohlenes Lernkonzept :

1. **Vorlesung** (Präsenz) – das HIER besprochene ist klausurrelevant!
2. **Tutorium** (Präsenz – **Herr Köhl,** Wiederholung des Vorlesungsstoffs, ab dem 17.04.24, 15:40 Uhr – 17:10 Uhr, HS 3)
3. **MyMathlab** (für Kapitel I bis IV – Bonuspunkte für Klausur!),
4. **Lerngruppen**

(5 ECTS – entspricht 125 h durchschnittlichem Arbeitsaufwand für den Kurs bzw. rd. 10,5 h je Woche bei 13 Vorlesungswochen)



Ergebnisse der Klausur WS 22/23

201 Anmeldungen

31 fristgerechte Rücktritte (RT)

27 Atteste (AT)

18 Angemeldete nicht erschienen (NE) -> 5,0

-> 125 Teilnehmende:

KLASSENSPIEGEL	
Notenbereich	**Anzahl**
bestanden (0 - 0)	0
sehr gut (1 - 1,5)	13
gut (1,6 - 2,5)	19
befriedigend (2,6 - 3,5)	23
ausreichend (3,6 - 4)	21
nicht ausreichend (4,1 - 5)	49
Teilnehmer/-in	125
Durchschnittsnote	3,6

-> Durchfallquote: 39,2 % (46,9 %, berücksichtigt man „NE“)

Ergebnisse der Klausur WS 23/24

233 Anmeldungen

41 fristgerechte Rücktritte (RT)

21 Atteste (AT)

5 Angemeldete nicht erschienen (NE) -> 5,0

-> 166 Teilnehmende:

KLASSENSPIEGEL	
Notenbereich	**Anzahl**
bestanden (0 - 0)	0
sehr gut (1 - 1,5)	34
gut (1,6 - 2,5)	27
befriedigend (2,6 - 3,5)	32
ausreichend (3,6 - 4)	31
nicht ausreichend (4,1 - 5)	42
Teilnehmer/-in	166
Durchschnittsnote	3,1

-> Durchfallquote: 25,3 % (28,3 %, berücksichtigt man „NE“)

Wichtig!

Die folgenden Folien fassen einige Inhalte – insbesondere Rechenregeln – zusammen, die als <u>bekannt</u> vorausgesetzt werden. Inhalte sind online:

https://www.hochschule-trier.de/hauptcampus/wirtschaft/studium/beratung-service/brueckenkurse-und-propaedeutika

Darüber hinaus wurden Ihnen passende Aufgaben zum Üben/Wiederholen auf MyMathLab zusammengestellt unter dem Titel

„Einstufungsquiz / Wiederholung“.

Bezeichnungskonventionen für Zahlen (Auswahl)

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ Menge der irrationalen Zahlen

Beispiel natürliche Zahlen: Die zum Abzählen verwendeten nichtnegativen ganzen Zahlen. (Die Null kann also dazu gezählt werden.) Die Gesamtheit dieser Zahlen nennt man die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$$

Aufgabe 1

Was ist die kennzeichnende Eigenschaft von irrationalen Zahlen? Welche irrationalen Zahlen kennen Sie?

Mathematik – Einführung/Wiederholung

Wir verwenden vier grundlegende Rechenoperationen:

- Addition $+$
- Subtraktion $-$
- Multiplikation $*$
- Division $/$

Zu jeder Rechenoperation existiert ein **neutrales Element** sowie ein **inverses Element**.

Neutrales Element: Jedes Element wird durch die Verknüpfung mit dem neutralen Element auf sich selbst abgebildet.
Bsp. Addition: $5 + \underline{0} = 5$
Bsp. Multiplikation: $5 * \underline{1} = 5$

Inverse: Wenn man ein Element und sein inverses Element mit einer Rechenoperation verknüpft, erhält man das neutrale Element als Ergebnis.
Bsp. Addition: $5 + \underline{(-5)} = 0$
Bsp. Multiplikation: $5 * \underline{1/5} = 1$

Aufgabe 2

Es gelte $a = 7$.

a) Was ist das zugehörige neutrale Element der Addition?
b) Was ist das zugehörige neutrale Element der Multiplikation?
c) Was ist die zugehörige Inverse der Addition?
d) Was ist die zugehörige Inverse der Multiplikation?

Trier University of Applied Sciences
HOCHSCHULE TRIER

Grundgesetze der Anordnung (Auszug)

– Zwischen zwei natürlichen Zahlen a und b besteht genau eine der Beziehungen $a < b$, $a = b$, $a > b$.

– $a = a$ (Reflexivität)

– Aus $a = b$ folgt $b = a$ (Symmetrie).

– Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$ (Transitivität).

Grundgesetze der Addition (Auszug)

– Zu zwei natürlichen Zahlen a und b existiert stets die **Summe** $a + b$ im Bereich der natürlichen Zahlen.

– Aus $a = a'$ und $b = b'$ folgt $a + b = a' + b'$ (Eindeutigkeit).

– $a + b = b + a$ (**Kommutativgesetz**)

– $(a + b) + c = a + (b + c)$ (**Assoziativgesetz**)

– Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ (**Monotoniegesetz**).

Grundgesetze der Subtraktion (Auszug)

– Existiert zu zwei natürlichen Zahlen a und b eine natürliche Zahl x, die die Gleichung $a + x = b$ erfüllt, so heißt $x = b - a$ **Differenz** von b und a.

– $x = b - a$ ist eindeutig bestimmt.

Grundgesetze der Multiplikation (Auszug)

– Zu zwei natürlichen Zahlen a und b existiert stets das Produkt $a \cdot b$ im Bereich der natürlichen Zahlen. Für „$a \cdot b$“ schreibt man auch „ab“.

– Aus $a = a'$ und $b = b'$ folgt $a \cdot b = a' \cdot b'$ (Eindeutigkeit).

– $a \cdot b = b \cdot a$ (**Kommutativgesetz**)

–$(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ (**Assoziativgesetz**)

– $(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c$ (**Distributivgesetz**)

– Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$ (**Monotoniegesetz**).

Grundgesetze der Division

– Existiert zu zwei natürlichen Zahlen a und b, **wobei $a \neq 0$ ist**, eine natürliche Zahl x, die die Gleichung $ax = b$ erfüllt, so gilt auch $x = b/a$ (Quotient von b und a).

– Die Grundgesetze der Division können für die rationalen Zahlen ergänzt werden um: Zu je zwei rationalen Zahlen $a \neq 0$ und b existiert genau eine rationale Zahl, die die Gleichung $ax = b$ erfüllt.

Ausgewählte Rechenregeln

– Ausklammern: $4 + 8 = 2 \cdot (2 + 4)$

– Kürzen von Brüchen:

$$\frac{\cancel{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b}}{\cancel{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} \rightarrow \underline{\text{Beispiel:}}\ \frac{\mathbf{3 \cdot 5}}{\mathbf{3 \cdot 7}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$$

aber $\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}} \neq \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$!!

Zudem: $\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}} = \frac{\cancel{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b}}{\cancel{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{c}} + \frac{\cancel{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{d}}{\cancel{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}} \rightarrow$ <u>Beispiel:</u> $\frac{\mathbf{3 \cdot 5 + 3 \cdot 4}}{\mathbf{3 \cdot 7}} = \frac{\mathbf{5 + 4}}{\mathbf{7}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}}$

Ausgewählte Rechenregeln

– Addieren von Brüchen:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}= \frac{a}{c}\cdot\mathbf{1}+\frac{b}{d}\cdot\mathbf{1}=\frac{a}{c}\cdot\overbrace{\frac{d}{d}}^{=1}+\frac{b}{d}\cdot\overbrace{\frac{c}{c}}^{=1}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{c\cdot d}$$

→ Beispiel: $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}= \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{5}=\frac{3\cdot 7+2\cdot 5}{5\cdot 7}= \frac{31}{35}$

– Multiplizieren von Brüchen:

$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$ → Beispiel: $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}= \frac{6}{35}$

– Dividieren von Brüchen:

Kehrwert

$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}= \frac{a}{c}\cdot\frac{d}{b}$ → Beispiel: $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{21}{10}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie:

$a)\ \frac{1}{4}+\frac{5}{7}$

$b)\ \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}$

$c)\ \frac{\frac{5}{9}}{\frac{2}{3}}$

Bei der Multiplikation von zwei Klammerausdrücken ist jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer unter Beachtung der Vorzeichenregel zu multiplizieren:

$$\boldsymbol{(a+b)\cdot(c-d)=a\cdot c-a\cdot d+b\cdot c-b\cdot d}$$

→ Beispiel: $(3x+4y)\cdot(z-x^2)=3xz-3x^3+4yz-4yx^2$

Bei der Multiplikation von mehr als zwei Klammerausdrücken wendet man dieses Verfahren schrittweise an:

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})\cdot(\mathrm{c}-\mathrm{d})\cdot(\mathrm{e}-\mathrm{f}-\mathrm{g})=(\mathrm{a}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{a}\cdot\mathrm{d}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{b}\cdot\mathrm{d})\cdot(\mathrm{e}-\mathrm{f}-\mathrm{g})$$

$$=\mathrm{ace}-\mathrm{acf}-\mathrm{acg}-\mathrm{ade}+\mathrm{adf}+\mathrm{adg}+\mathrm{bce}-\mathrm{bcf}-\mathrm{bcg}-\mathrm{bde}+\mathrm{bdf}+\mathrm{bdg}$$

Aufgabe 4

Lösen Sie auf:

$(5zx-4z^3)\cdot(22z+3x^2)$

Als Spezialfall erhält man die bekannten **binomischen Formeln**:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$$

→ <u>Beispiele:</u>

$$(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

$$(ax-by)^2 = a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2$$

$$\left(4u+\sqrt{2}v\right)\left(4u-\sqrt{2}v\right) = 16u^2 - 2v^2$$

Potenzen

Unter der n-ten Potenz einer beliebigen reellen Zahl x versteht man das n-fache Produkt von x mit sich selbst:

$$x \cdot x = x^2 \qquad x \cdot x \cdot x = x^3 \qquad \rightarrow \qquad \overbrace{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}^{\text{n mal}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$$

Dabei ist x die **Basis** und $n = 1, 2, 3, \ldots$ der **Exponent.**

Zudem gilt bei Potenzen:

$\boldsymbol{x^m \cdot x^n = x^{m+n}}$ → Beispiele: $x^5 \cdot x^3 = x^8$ oder $x^{-5} \cdot x^3 = x^{-2}$

$\boldsymbol{\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}}$ → Beispiele: $\frac{x^5}{x^3} = x^2$ oder $\frac{x^3}{x^5} = x^{-2}$ oder $\frac{x^5}{x^5} = x^0 = 1$

$\boldsymbol{(x^m)^n = x^{m \cdot n}}$ → Beispiel: $(x^3)^5 = x^{15}$

$\boldsymbol{(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n}$ → Beispiel: $(x \cdot y)^5 = x^5 \cdot y^5$

Des weiteren gilt:

Die folgenden Umformungen sind insbesondere bei Ableitungen interessant, um bspw. die Potenzregel anwenden zu können:

$\boldsymbol{\frac{a}{x^y} = ax^{-y}}$ → Beispiel: $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ oder $\frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$

$\boldsymbol{\sqrt[a]{x^y} = x^{\frac{y}{a}}}$ → Beispiel: $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$

Aufgabe 5

Stellen Sie als Potenz dar:

a) $\sqrt[13]{x^5}$

b) $5 \cdot \sqrt[3]{k^7}$

c) $\frac{1}{b^7}$

d) $\frac{21}{x^{17}}$

Fassen Sie zusammen:

a) $y^3 \cdot y^4$

b) $\frac{x^8}{x^5}$

c) $(p^3)^{2,5}$

Logarithmus:

Unter dem Logarithmus c einer positiven reellen Zahl a zu einer positiven, von eins verschiedenen reellen Basis b versteht man diejenige reelle Zahl c, mit der die Basis b zu potenzieren ist, um a zu erhalten:

$$\boldsymbol{\log_b a = c} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{b^c = a}$$

Beispiel:

$$\log_2 8 = 3 \qquad \rightarrow \qquad 2^3 = 8$$

Taschenrechner unterscheiden meist zwischen dem 10er Logarithmus (log) und dem Logarithmus zur Basis e (ln), der auch „Logarithmus Naturalis“ genannt wird. Einige Modelle bieten mit $\log_{\blacksquare} \blacksquare$ auch individuelle Logarithmusberechnungen an.

Es gelten die folgenden Rechenregeln zu Logarithmen:

$\boldsymbol{\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)}$ → Beispiel: $\log(3 \cdot 5) = \log(3) + \log(5)$

$\boldsymbol{\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)}$ → Beispiel: $\log\left(\frac{3}{5}\right) = \log(3) - \log(5)$

$\boldsymbol{\log(x^y) = y \cdot \log(x)}$ → Beispiel: $\log(5^3) = 3 \cdot \log(5)$

Aufgabe 6

Berechnen Sie:

a) $\ln(3)$

b) $\log(120)$

c) $\log_2(33)$

Fassen Sie zuerst zusammen und berechnen Sie dann

a) $\ln(4) \cdot \ln(3)$

b) $\log(3^7)$

c) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

– Die Grundform der linearen Gleichung mit einer Unbekannten x lautet

$$\boldsymbol{ax = b}$$

– Dabei sind a, b reelle Zahlen. **Die Gleichung lösen heißt, alle reellen Zahlen anzugeben, die für x eingesetzt die Gleichheitsbedingung erfüllen**.

– Da die Division durch $a \neq 0$ der Multiplikation mit $1/a$ äquivalent ist, ist die **einzige mögliche Lösung** von $ax = b$

$$\boldsymbol{x = \frac{b}{a}} \quad mit \quad a \neq 0$$

– Ist dagegen $a = 0$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden

  – $b \neq 0$, dann lautet die Gleichung $0 \cdot x = b$, was einen Widerspruch an sich darstellt. Es existiert in diesem Fall **keine Lösung**.

  – $b = 0$, dann lautet die Gleichung $0 \cdot x = 0$. Diese Gleichung ist für **alle** reellen Zahlen erfüllt. Man schreibt auch $x =$ bel. (beliebig).

– Also möglich: **eindeutige Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen**.

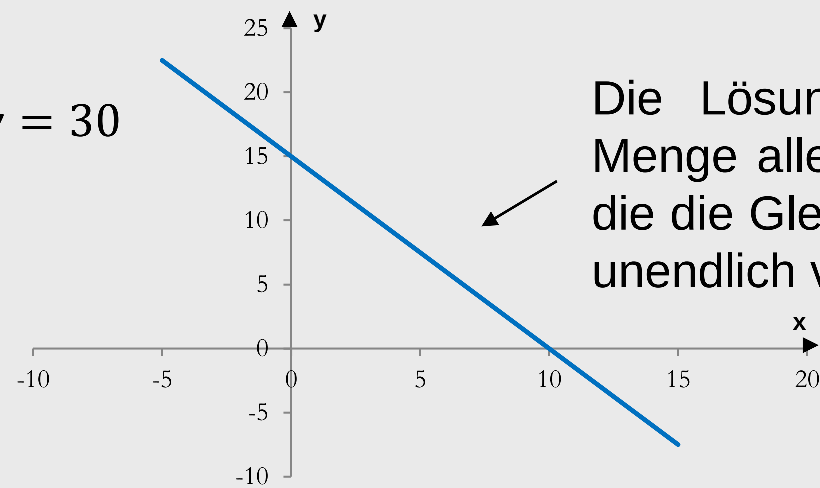
Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Eine solche Gleichung kann dargestellt werden durch

$$\boldsymbol{ax + by = c}$$

Hierin können die unbekannten Größen x und y beliebige reelle Zahlen (Variablen) sein, die in der angegeben Weise miteinander verknüpft sind. Die Gleichung stellt auch eine lineare Funktionsgleichung dar, deren Bild eine Gerade im x, y-Koordinatensystem ist.

Bsp.:
$3x + 2y = 30$



Die Lösung ist offenbar die Menge aller Wertepaare (x, y), die die Gleichung erfüllen. Hier unendlich viele.

Die Sonderfälle $a = 0$ oder $b = 0$ beschreiben Geraden, die parallel zur y- bzw. x-Achse verlaufen.

(Grafik erstellt mit MS Excel)

Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten hat die allgemeine Gestalt:

$$\text{I.}\quad a_1x + b_1y = c_1$$

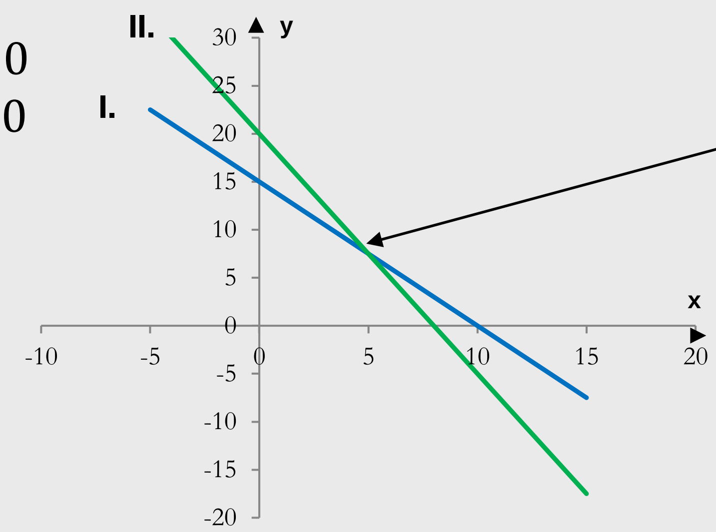
$$\text{II.}\quad a_2x + b_2y = c_2$$

Diese Bestimmungsgleichungen können jeweils im x, y-Koordinatensystem als Geraden dargestellt werden. Schneiden sich die Geraden in einem Punkt, so sind die Koordinaten dieses Schnittpunktes die einzige Lösung des Gleichungssystems.

Bsp.:

I. $3x + 2y = 30$

II. $5x + 2y = 40$



Eindeutige Lösung des Gleichungssystems bei $x = 5$ und $y = 7{,}5$.

(Grafik erstellt mit MS Excel)

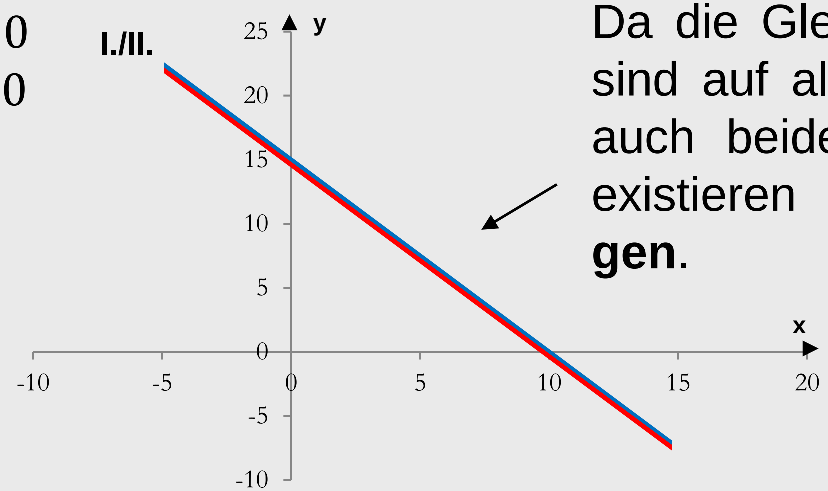
Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Beinhalten die beiden Gleichungen die gleiche Information, so existieren unendlich viele Lösungen, weil eine Gleichung lediglich das Vielfache einer anderen ist. **Zur Lösung von Gleichungssystemen benötigt man daher immer so viele voneinander unabhängige Gleichungen, wie Unbekannte vorliegen**.

Bsp.:

I. $3x + 2y = 30$

II. $6x + 4y = 60$



Da die Gleichungen redundant sind, sind auf allen Punkten der Geraden auch beide Gleichungen erfüllt: Es existieren **unendlich viele Lösungen**.

(Grafik erstellt mit MS Excel)

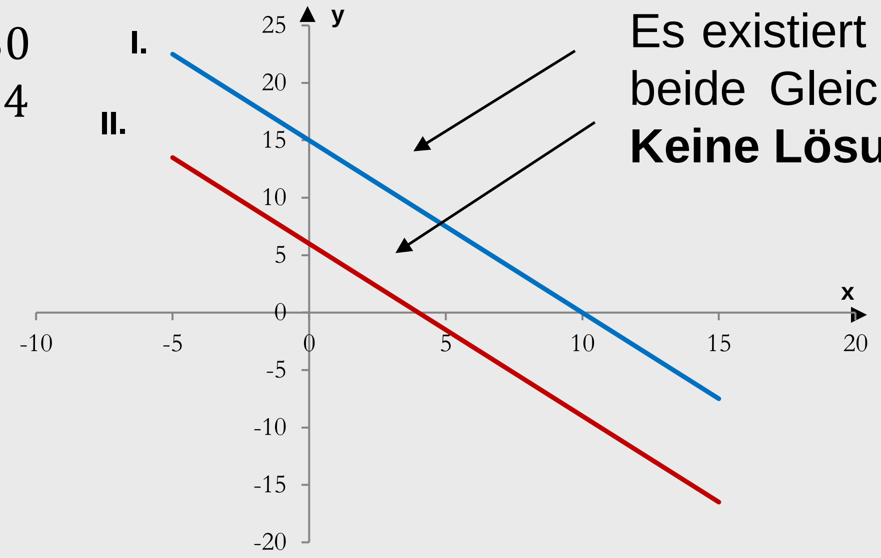
Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Der Fall, dass keine Lösung existiert, tritt dann ein, wenn die durch I und II dargestellten Geraden parallel verlaufen, aber nicht zusammenfallen.

Bsp.:

I. $3x + 2y = 30$

II. $6x + 4y = 24$



Es existiert kein Punkt, an dem beide Gleichungen erfüllt sind: **Keine Lösung!**

Also ist auch bei Gleichungen mit zwei Unbekannten grundsätzlich möglich:

- **eindeutige Lösung**
- **unendlich viele Lösungen**
- **keine Lösung**

(Grafiken erstellt mit MS Excel)

Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Zur Lösung von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten wird vorgestellt:

- **Additionsverfahren**
- **Einsetzungsverfahren**
- **Gleichsetzungsverfahren**

Additionsverfahren

Man addiert ein bestimmtes (evtl. auch negatives) Vielfaches der II. Gleichung zur I. Gleichung (oder umgekehrt) derart, dass eine Unbekannte nicht mehr auftritt.

Beispiel:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{I.} & 2x + 3y & = & 4 \quad / -2 \cdot \text{II} \\
\text{II.} & x - 2y & = & -5 \\
\hline
\text{I.} & 7y & = & 14 \\
\text{I.} & y & = & 2
\end{array}
$$

Die zweite Gleichung 2 mal von der ersten abziehen.
Dadurch „verschwindet“ das x.

Eindeutige Lösung!

Danach $y = 2$ in II. einsetzen: $x - 2 \cdot 2 = -5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = -1}$

Additionsverfahren

Weiteres Beispiel:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I.} & 2x + 3y &=& 4 \quad / -0{,}5 \cdot \text{II} \\ \text{II.} & 4x + 6y &=& 8 \\ \hline \text{I.} & 0x + 0y &=& 0 \end{array}$$

Unendlich viele Lösungen!
(Es lag zwei mal die gleiche Gleichung vor)

Weiteres Beispiel:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I.} & 2x + 3y &=& 4 \quad / -0{,}5 \cdot \text{II} \\ \text{II.} & 4x + 6y &=& 10 \\ \hline \text{I.} & 0x + 0y &=& -1 \end{array}$$

Widerspruch, keine Lösung!

Einsetzungsverfahren

Man löst eine Gleichung nach einer Unbekannten (z. B. y) auf und setzt das Ergebnis in die andere Gleichung ein. Dann erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten (z. B. x). **Beispiel mit eindeutiger Lösung**:

I. $2x + 3y = 4$

II. $x - 2y = -5$ $\quad / -2 \cdot y$

Auflösen nach x

II‘. $x = 2y - 5$

→ einsetzen in I.:

$$2(2y-5) + 3y = 4$$

$$4y - 10 + 3y = 4$$

$$7y = 14$$

$$\underline{\underline{y = 2}}$$

→ einsetzen in II‘.: $x = 2 \cdot 2 - 5 \rightarrow \underline{\underline{x = -1}}$

Gleichsetzungssverfahren

Man löst beide Gleichungen nach der gleichen Unbekannten (z. B. y) auf, setzt sie gleich und erhält dabei eine Gleichung mit einer Unbekannten (z. B. x).
Beispiel mit eindeutiger Lösung:

I. $2x + 3y = 4$
II. $x - 2y = -5$

Beide Gleichungen nach der gleichen Variable auflösen, hier nach x

I‘. $x = 2 - 1,5y$
II‘. $x = 2y - 5$

→ gleichsetzen:

$$2 - 1{,}5y = 2y - 5$$
$$7 = 3{,}5y$$
$$\underline{\underline{y = 2}}$$

→ einsetzen in II‘.: $x = 2 \cdot 2 - 5$ → $\underline{\underline{x = -1}}$

Aufgabe 8

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit einem Verfahren Ihrer Wahl:

a) $$\begin{aligned} 3x + y &= 6 \\ x - y &= 10 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2m - u &= 6 \\ -m - 2u &= 3 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) &= 23 \\ 3(x_2 - 2) &= 19 - 5(x_1 - 1) \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen („Polynominale Gleichungen zweiten Grades“)

– Die Grundform einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten x lautet

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

– Zum Lösen einer quadratischen Gleichung stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung (p,q-Formel, a,b,c-Formel, quadratische Ergänzung). Wir betrachten an dieser Stelle ausschließlich die **p,q-Formel**. Dazu ist die oben angegebene allgemeine Form der quadratischen Gleichung in ihre **Normalform** zu überführen, indem durch den Koeffizienten a geteilt wird:

$$\boldsymbol{x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{p}x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{q} = 0}$$

– Nun kann die p,q-Formel angewendet werden, es ergeben sich zwei x-Werte:

$$\boldsymbol{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Beispiel p,q-Formel:

$$2x^2 - 12x + 15 = -1 \qquad /+1$$

$$2x^2 - 12x + 16 = 0 \qquad /:2$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

↑

Normalform

→ Dann ergibt sich:

$$x_{1/2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 4}$$

$$\boldsymbol{x_2 = 2}$$

<u>Aufgabe 10</u>

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $(x - 6)(x + 5) = 0$

b) $5k^2 = 125k$

c) $3x^2 - 27 = 0$

Summenzeichen und Produktzeichen

Summen- und Produktzeichen dienen zur vereinfachten Darstellung von Summen und Produkten. Sie finden häufig Anwendung in komplexen Formeln, bspw. in Formeln der Statistik.

- Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^{n} x$$

Spricht sich: „Die Summe über i gleich 1 bin n von… “. Der Index steigt beim Auf-summieren stets um +1 an.

- Produktzeichen:

$$\prod_{i=1}^{n} x$$

- Fakultät:
  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Aufgabe 10

1) Bestimmen Sie die folgenden Summen (oder schreiben Sie sie aus):

a) $$\sum_{i=1}^{10} 2$$

b) $$\sum_{i=1}^{5} x$$

c) $$\sum_{i=1}^{7} i$$

d) $$\sum_{i=2}^{6} x^i$$

e) $$\sum_{i=1}^{10} (2 \cdot i - i^2)$$

f) $$\sum_{k=1}^{5} i$$

2) Summieren Sie alle Zahlen von 1 bis 100.