1 Mathematische Grundlagen

Der Begriff der Menge ist einer der grundlegenden Begriffe in der Mathematik. Mengen dienen dazu, Dinge oder Objekte zu einer Einheit zusammenzufassen. In diesem Kapitel wird der Mengenbegriff eingeführt und es werden Beziehungen zwischen Mengen und Operationen auf Mengen definiert und erläutert. Darauf aufbauend lernen Sie die Konzepte Relation und Funktion als Beschreibungsmittel von Beziehungen zwischen Objekten kennen.

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollen Sie

- den Unterschied zwischen Relationen und Funktionen verstehen und
- diese Konzepte zur Beschreibung bestimmter Aufgabenstellungen anwenden können.

1.1 Mengen

Die Festlegung des Begriffs der Menge ist die Grundlage für die Definition der später behandelten Konzepte Relation und Funktion. In diesem Abschnitt werden Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen, Beziehungen zwischen Mengen und Operationen auf Mengen eingeführt.

1.1.1 Definition und Beschreibung von Mengen

Von G. Cantor (1845 - 1915), dem Begründer der Mengenlehre, stammt folgende Definition des Begriffs der Menge:

Definition 1.1
Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedlicher Dinge unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

Definition Menge

Nach dieser Definition beschreibt man eine Menge durch die Angabe der Elemente, aus denen sie besteht. Dadurch entsteht ein neues Ganzes, ein neues Objekt, für das wir auch einen Namen vergeben können. Beispiele für Mengen im Sinne dieser Definition sind:

```
Zahlenmenge1 = {2, 4, 6, 8, 10}
Zahlenmenge2 = {x| x ist eine gerade Zahl zwischen 1 und 11}
```

Eine Menge wird festgelegt durch die Angabe eines Namens (oder Bezeichners) links des Gleichheitszeichens, z.B. Zahlenmenge1. Die Elemente werden rechts vom Gleichheitszeichen, zwischen den beiden Zeichen „{“ und „}“, den *Mengenklammern*, angegeben. Für die Angabe der Elemente gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten: Entweder werden sie *aufzählend* angegeben, d.h. durch Auflistung aller Elemente wie bei Zahlenmenge1, oder *beschreibend,* d.h. durch die Vorgabe von Eigenschaften der Elemente wie bei Zahlenmenge2. Die allgemeine Form dieser zweiten Beschreibung ist $\{ x \mid P(x) \}$ wobei P ein Prädikat ist (s. Kapitel 2), das für die Elemente der Menge erfüllt sein muß.

Die aufzählende Beschreibungsmöglichkeit ist im Prinzip nur für endliche Mengen anwendbar. Aus Gründen der leichteren Verständlichkeit verwendet man diese Beschreibung aber manchmal auch für unendliche Mengen oder große endliche Mengen, wenn aus einer endlichen Aufzählung von Elementen die beschriebene Menge offensichtlich wird. Die restlichen Elemente werden durch Punkte (…) angedeutet. Die Aufzählung der Menge unter Zuhilfenahme der Punkte verwendet man auch für große endliche Mengen, bei denen eine genaue Aufzählung der Elemente zu mühsam ist (wie bei Zahlenmenge5). Beispiele für diese Darstellungsform sind

```
Zahlenmenge3 = {2, 4, 6, 8, …}
Zahlenmenge4 = {1, 4, 9, 16, 25, 36, … }
Zahlenmenge5 = {1, 2, …, 10000 }
```

Die tatsächlich aufgezählten Elemente sollten eindeutig festlegen, welche Elemente durch … gemeint sind (siehe Definition Menge: „ … bestimmter … “). So könnte es sich bei der

Zahlenmenge6 = {3, 5, 7, …}

um die ungeraden Zahlen größer als 2 oder um die Primzahlen größer als 2 handeln. Diese Zweideutigkeit könnte ganz einfach durch die Angabe eines zusätzlichen Elementes, also durch 9 bzw. durch 11 beseitigt werden.

Mengen sind nicht auf die Zusammenfassung von Zahlen beschränkt, sondern können aus beliebigen Objekten bestehen, z.B.

```
Menge5 = { Katze, Mathematik, Fußball}
Menge6 = { Matthäus, Kahn, Basler, Helmer}
Menge7 = { x | x ist Teilnehmer am Fernstudium Informatik}
```

Eine wesentliche Anforderung an die Elemente einer Menge ist, daß sie voneinander unterscheidbar sein müssen (siehe Definition Menge: „ … wohlunterschiedlicher … “). Keine Menge ist demnach die Aufzählung

```
Keine_Menge = {5, 5}
```

da darin Elemente doppelt vorkommen.

Um zu beschreiben, daß ein Element a in einer Menge M vorkommt, wird das Zeichen „$\in$“, ein stilisiertes e, verwendet. Man schreibt $a \in M$ und spricht dies „a ist in M enthalten“, „a ist ein Element aus M“ oder einfach „a Element M“. Will man ausdrücken, daß ein bestimmtes Element a nicht in einer Menge M enthalten ist, so schreibt man dies als $a \notin M$ (sprich: „a nicht Element M“). Statt $a \in M$ und $b \in M$ schreiben wir auch $a, b \in M$.

Element

Î

Ï

Für endliche Mengen M bezeichnen wir mit $|M|$ die Anzahl der Elemente von M. $|M|$ wird auch als Kardinalzahl oder als Kardinalität von M bezeichnet.

Kardinalität

Beispiel: Die Kardinalität von Zahlenmenge1 ist |Zahlenmenge1| = 5.

Eine Reihe von Mengen ist so wichtig und wird so häufig benutzt, daß dafür feste Bezeichner verwendet werden. Dazu gehören die folgenden Mengen:

$\mathbf{N}$	$= \{ 1, 2, 3, ...\}$	*natürliche Zahlen*
$\mathbf{N}_0$	$= \{ 0, 1, 2, 3, ...\}$	*natürliche Zahlen mit 0*[1]
$\mathbf{N}_k$	$= \{ k, k+1, k+2, ...\}$	*natürliche Zahlen ab k*
$\mathbf{N}_{34}$	$= \{ 34, 35, 36, ...\}$	*Beispiel einer Menge* $\mathbf{N}_k$
$\mathbf{Z}$	$= \{ ..., -1, 0, 1, 2, ...\}$	*ganze Zahlen*
$\mathbf{Q}$	$= \{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, \mathbf{q}^{1}\mathbf{0} \}$	*rationale Zahlen*
$\mathbf{R}$		*reelle Zahlen*
$\mathbf{C}$	$= \{ a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$	*komplexe Zahlen*

Von besonderer Bedeutung ist die Menge, die kein Element enthält: die *leere Menge*. Sie wird mit dem Symbol „Ø“ bezeichnet[2]. Die leere Menge tritt häu-

Leere Menge

[1] In neuester Zeit wird zwischen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{N}_0$ oft nicht unterschieden, d.h es ist $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0$.

[2] In älteren Büchern findet man auch das Symbol {} für die leere Menge. Diese Bezeichnung wird heute nicht mehr verwendet.

figer auf, wenn man Lösungsmengen von Gleichungen beschreibt. So hat z.B. die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung in den reellen Zahlen. Deshalb gilt für die Lösungsmenge L dieser Gleichung, die beschrieben wird als

$$L = \{x \mid x \in R \textbf{ und } x^2 + 1 = 0 \}$$

daß L die leere Menge bezeichnet. Dies schreibt man kurz als L = Ø.

1.1 Welche Eigenschaften charakterisieren eine Menge?

1.2 Wie kann man die Zahlenmenge $\mathbf{N}_k$ in beschreibender Form angeben?

1.3 Welche Elemente umfaßt die Menge
$T_{24} = \{x \mid x \in N \text{ und } x \text{ teilt die natürliche Zahl } 24 \}$?

1.1.2 Mengen und ihre Teilmengen

Am Ende des vorherigen Abschnitts ist uns bereits eine Beziehung zwischen zwei Mengen begegnet, nämlich zwischen der Lösungsmenge L und der leeren Menge: die Menge L und die leere Menge sind gleich, da sie dieselben Elemente enthalten.

Teilmenge

Die wichtigste Beziehung zwischen zwei Mengen ist die Teilmengenbeziehung (manchmal auch Mengeninklusion genannt): Die Menge *A ist eine Teilmenge der Menge B*, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind[3].
Dies schreibt man als: $A \subseteq B$.

Um zu betonen, daß B alle Elemente von A und darüber hinaus noch weitere Elemente enthält, schreibt man $A \subset B$.
A heißt dann *echte Teilmenge* von B.

Für die Mengen aus Abschnitt 1.1 gilt sowohl
Zahlenmenge1 $\subseteq$ Zahlenmenge3 als auch
Zahlenmenge1 $\subset$ Zahlenmenge3.

[3] Man nennt dann auch die Menge B eine Obermenge der Menge A.

Insbesondere ist die leere Menge in jeder Menge enthalten, d.h. es gilt $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M. Außerdem ist jede Menge in sich selbst enthalten, d.h. es ist $M \subseteq M$ für jede beliebige Menge M.

Gleichheit von Mengen

Die Gleichheit von zwei Mengen A und B wird über die Teilmengenbeziehung festgelegt. Es gilt

$A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ *und* $B \subseteq A$ gelten.

Von den in 1.1 aufgeführten Mengen sind Zahlenmenge1 und Zahlenmenge 2 gleich, denn es gilt sowohl

Zahlenmenge1 $\subseteq$ Zahlenmenge2, als auch
Zahlenmenge2 $\subseteq$ Zahlenmenge1.

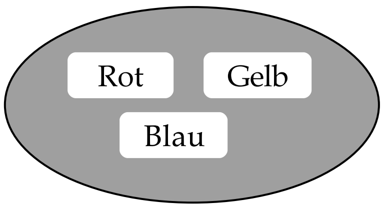
Aus der Definition der Gleichheit wird auch ersichtlich, daß Mengen unabhängig von der Aufzählungsreihenfolge ihrer Elemente sind. So bezeichnen die folgenden Beschreibungen alle die gleiche Menge:

Primärfarben = {Rot, Gelb, Blau} = { Rot, Blau, Gelb } = { Gelb, Rot, Blau }

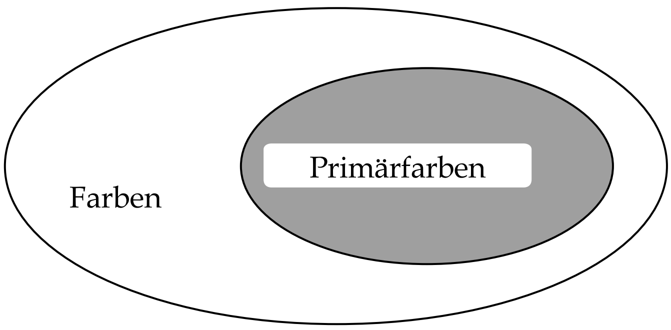
Mengendiagramme
Venn-Diagramme

Eine Möglichkeit zur graphischen Darstellung von Mengen und deren Beziehungen untereinander bieten *Mengendiagramme* (oder *Venn-Diagramme*). Dabei wird jede Menge durch eine ovale Figur dargestellt. In diese Figur werden entweder die Elemente eingetragen, oder sie wird mit dem Namen der dargestellten Menge beschriftet.

Die Menge der Primärfarben läßt sich durch folgende Figur darstellen:



Eine Teilmengenbeziehung zwischen zwei Mengen kann nun durch zwei ineinander enthaltene Figuren dargestellt werden:



Potenzmenge

Eine Teilmenge einer Menge M beschreibt in gewissem Sinn eine Auswahl von Elementen aus den Elementen von M. Die Menge aller Teilmengen der Menge M hat einen eigenen Namen: sie heißt die *Potenzmenge* der Menge M. Sie ist eine *Menge von Mengen* und wird mit $P(M)$ bezeichnet. Sie beinhaltet alle verschiedenen Auswahlmöglichkeiten von Elementen aus M. Formal wird die Potenzmenge definiert als

$$P(M) = \{ M' \mid M' \subseteq M \}$$

Beispiel 1.2

Sei $M = \{1, 2, 3\}$

Dann ist $P(M) = \{ \varnothing,$	0-elementige Teilmengen
$\{1\}, \{2\}, \{3\},$	1-elementige Teilmengen
$\{1, 3\}, \{1, 2\}, \{3, 2\},$	2-elementige Teilmengen
$\{1, 3, 2\} \quad \}$	3-elementige Teilmengen

1.4 Wie lautet die Potenzmenge zur Menge $M = \{a, b, 1, 7\}$?

1.5 Die Menge der Mischfarben entsteht aus der Menge der Primärfarben, indem man von jeder Primärfarbe höchstens einen Anteil nimmt und zu einer neuen Farbe mischt.
Wie viele Wahlmöglichkeiten für Mischfarben gibt es?
In welchem Verhältnis steht das Ergebnis zur Menge P (Primärfarben)?

Da für jede Menge M gilt, daß $\varnothing \subseteq M$ und $M \subseteq M$, sind unter den Teilmengen jeder Menge M immer die leere Menge und die Menge M selbst. Für jede Menge M gilt daher:

$$\varnothing \in P(M) \text{ und } M \in P(M)$$[4].

Damit ist beispielsweise die Potenzmenge der leeren Menge

$$P(\varnothing) = \{ \varnothing \}.$$

Das heißt, obwohl die leere Menge kein Element enthält, ist die Potenzmenge dieser Menge nicht etwa wieder die leere Menge, sondern die Menge mit der leeren Menge als einzigem Element. Es gilt also, daß die Kardinalität der Potenzmenge der leeren Menge $|P(\varnothing)| = 1$ ist.

---

[4] Beachten Sie bitte, daß hier $M \in P(M)$ steht und nicht $M \subseteq P(M)$!

Die Potenzmengen der Mengen {1, 2, 3} und {Rot, Gelb, Blau} haben jeweils 8 Elemente. Man überlegt sich leicht, daß dies für alle Potenzmengen von Mengen mit drei Elementen gilt.

Kardinalität der Potenzmenge

Allgemein kann man sagen: Besteht eine Menge M aus genau n Elementen, dann hat die Potenzmenge P(M) genau 2^n Elemente, d.h. es gilt $|P(M)| = 2^{|M|}$.

1.6 Für welche Mengen kann man sowohl $M \in P(M)$ als auch $M \subseteq P(M)$ schreiben?
Warum ist die Schreibweise $M \in P(M)$ korrekt, aber die Schreibweise $M \subseteq P(M)$ für M ¹ Ø nicht?

1.7 Sei M = {1}. Welche Gestalt hat $P(P(M))$?